Olimpíada Nacional Titãs da Matemática

Resposta as contestações

1 Prova nível prometeus

Questão 1. *(Questão 4 da prova) Em uma missão de espalhar o conhecimento matemático pelos mundo, Febe, Atlas, Prometeus e Céos decidiram se dividir em duplas. Uma dupla partiria rumo ao leste, enquanto a outra seguiria para o oeste. De quantas maneiras distintas essa viagem pode ser organizada?*

(a) 6 **(b)** 12 **(c)** 18 **(d)** 24 **(e)** 48

Essa questão pode ter uma outra interpretação e vamos aceitar essa também.
Podemos resolver este problema utilizando o conceito de **Combinação**.

1. **Escolher a primeira dupla (para o leste):** Primeiro, calculamos de quantas maneiras podemos escolher 2 pessoas de um grupo de 4 para formar a dupla que irá para o leste. A ordem da escolha dos membros não importa, então usamos a fórmula de combinação:

$$C(4,2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = \frac{24}{4} = 6$$

   Existem 6 maneiras possíveis de formar a dupla que vai para o leste.

2. **Formar a segunda dupla (para o oeste):** Uma vez que a primeira dupla é escolhida, as duas pessoas restantes formam, automaticamente, a dupla que irá para o oeste. Há apenas 1 maneira de formar esta segunda dupla ($C(2,2) = 1$).

Conclusão

O número total de maneiras distintas de organizar a viagem é o número de maneiras de escolher a primeira dupla. As 6 organizações possíveis são:

1. **Leste:** {Febe, Atlas}, **Oeste:** {Prometeus, Céos}
2. **Leste:** {Febe, Prometeus}, **Oeste:** {Atlas, Céos}
3. **Leste:** {Febe, Céos}, **Oeste:** {Atlas, Prometeus}
4. **Leste:** {Atlas, Prometeus}, **Oeste:** {Febe, Céos}
5. **Leste:** {Atlas, Céos}, **Oeste:** {Febe, Prometeus}
6. **Leste:** {Prometeus, Céos}, **Oeste:** {Febe, Atlas}

Resposta: Existem **6 maneiras distintas** de organizar essa viagem.

Questão 2. *(Questão 12 da prova) Na lendária corrida de MaratONTMa, os próprios deuses olímpicos decidiram participar. Foram 2026 corredores, entre semideuses, heróis, ninfas e criaturas encantadas. A corrida atravessava o Rio Estige, subia as escadas do Olimpo e terminava nos Jardins Suspensos de Atena.*

Entre os participantes, estava Hermes, o mensageiro dos deuses, que decidiu não usar suas sandálias aladas, pois queria testar sua velocidade natural. Ao final da prova, Hermes chegou coem um sorriso, suado mas satisfeito. Sabendo que a quantidade de competidores que chegaram antes de Hermes era exatamente um oitavo da quantidade dos que chegaram depois dele, em qual posição terminou Hermes?

(a) 750 **(b)** 500 **(c)** 250 **(d)** 225 **(e)** 175

Resposta: Alternativa **d**.

Solução. Sem contar com Hermes há 2025 participantes. Sabendo que a quantidade de participantes que chegaram antes dele representa a oitava parte dos que chegaram depois dele, então sendo x a quantidade de competidores que chegaram antes dele, $8x$ chegaram depois dele. Assim,

$$8x + x = 2025 \quad \Rightarrow \quad 9x = 2025 \quad \Rightarrow \quad x = 225.$$

Assim, chegaram antes dele 225 competidores, portanto Hermes ficou na 225 posição. □

Questão anulada: Se chegaram 225 pessoas antes dele, então ele está na posição 226.

Questão 3. *(Questão 16 da prova) Durante uma competição na sede da ONTM, cinco deuses: Atena, Hermes, Apolo, Ártemis e Dionísio, participaram de uma prova final de enigmas.*

Ao fim da competição, um deles foi declarado vencedor, mas cada deus fez uma afirmação:

- *Atena disse: "Hermes não venceu."*
- *Hermes disse: "Apolo venceu."*
- *Apolo disse: "Eu não venci."*
- *Ártemis disse: "Hermes está mentindo."*
- *Dionísio disse: "Ártemis está dizendo a verdade."*

Sabe-se que exatamente uma das divindades está dizendo a verdade. Quem verdadeiramente venceu competição?

(a) *Atena* **(b)** *Hermes* **(c)** *Apolo* **(d)** *Ártemis* **(e)** *Dionísio*

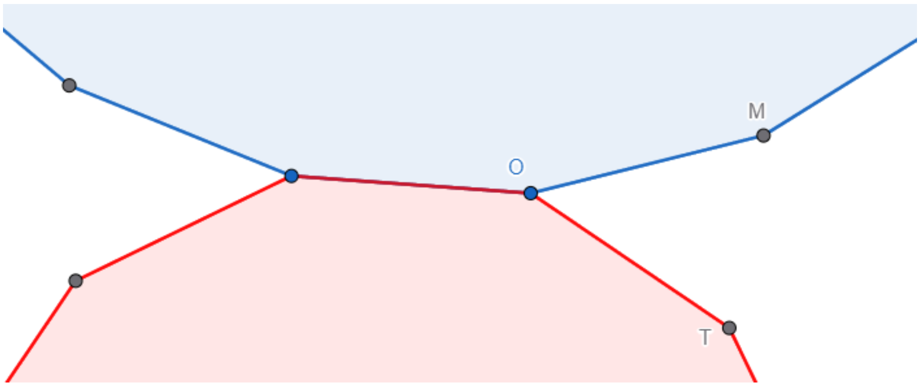
Questão anulada: Não há como uma divindade apenas estar correta.

---

2 Prova Nível Céos

- A questão 4 da prova nível Ceós é igual a questão 12 da prova nível Prometeus (a primeira a ser analisada na seção anterior.)
- A questão 7 alguém questionou se existia a resposta na plataforma Quilgo e, sim ela estava lá.
- igual a segunda questão analisada na seção anterior.

Questão 4. *(Questão 18 na prova) A figura a seguir mostra parte de dois polígonos regulares que possuem um lado em comum:*



Sabendo que os polígonos de azul e de vermelho possuem 360 *e* 120 *lados respectivamente. Determine o valor da medida do ângulo* $O\hat{T}M$*.*

Resposta: $89°$.

Solução. Como os polígonos compartilham um lado, então o triângulo $\triangle OTM$ é isósceles, portanto $O\hat{T}M = O\hat{M}T$. Para progredir no problema precisamos descobrir o valor de $T\hat{O}M$, e para isso precisaremos encontrar os valores dos ângulos internos dos polígonos em azul e em vermelho, pois o ângulo em O todo mede $360°$. O ângulo interno do polígono de vermelho mede

$$a_{120} = \frac{(120-2)\cdot 180°}{120} = 177°$$

e o ângulo interno do polígono azul mede

$$a_{360} = \frac{(360-2)\cdot 180°}{360} = 179°.$$

Assim, como o ângulo em O é de uma volta inteira, então:

$$T\hat{O}M + 177° + 179° = 360° \quad \Rightarrow \quad T\hat{O}M = 4°.$$

Agora, como a soma dos ângulos internos de $\triangle OTM$ é $180°$, então

$$O\hat{T}M = O\hat{M}T = \frac{180° - 4°}{2} = 89°.$$

Correção do erro de digitação: Faremos primeiro uma observação. Essa questão era aberta na plataforma

Quilgo. Então não será anulada. há um erro de conta na seguinte passagem: Assim, como o ângulo em O é de uma volta inteira, então:

$$T\hat{O}M + 177° + 179° = 360° \quad \Rightarrow \quad T\hat{O}M = 4°.$$

Agora, como a soma dos ângulos internos de $\triangle OTM$ é 180°, então

$$O\hat{T}M = O\hat{M}T = \frac{180° - 4°}{2} = 88°.$$

Logo a resposta correta é 88.

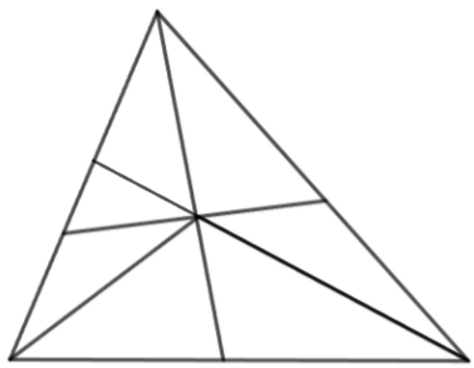
□

---

3 Prova nível Atlas

- A questão 10 é a da corrida das divindades já analisada nas provas anteriores, foi anulada.
-

Questão 5. *(Questão 6 na prova) Quantos triângulos há na figura abaixo?*



(a) 14 **(b)** 15 **(c)** 16 **(d)** 17 **(e)** 18

Resposta: Alternativa **d**.

Solução. É uma questão de visualização. Há:

- 7 triângulos menores e que não são união de outros triângulos;
- 4 triângulos que são formados pela união de dois triângulos;
- 3 triângulos que são formados pela união de três triângulos;
- 2 triângulos que são formados pela união de quatro triângulos;
- 1 triângulos formado pela união de todos os triângulos.

Portanto há 17 triângulos na figura.

Correção: Há 4 triângulos que são formados pela união de três triângulos; Portanto há 18 triângulos na figura. Alteração do gabarito para o item (e);

□

Questão 6. *(Questão 13 da prova) Considere que as letras O, T e M representam dígitos distintos. Quanto números da forma $OT26M$ são divisíveis por 72?*

(a) 10 **(b)** 9 **(c)** 8 **(d)** 7 **(e)** 6

Resposta: Alternativa **b**.

Solução. Como $72 = 8 \cdot 9$, então o número é divisível por 8 e 9.

- Por ser divisível por 8, os últimos três dígitos deve formar um número múltiplo de 8, temos assim, que $M = 4$.

- Por ser divisível por 9, a soma dos dígitos deve ser múltiplo de 9. Como $O + T + 2 + 6 + 4 = O + T + 12$, então $O + T$ pode assumir os valores 6 ou 15. $O + T = 6$ há cinco pares de soluções: $(O, T) \in \{(1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1), (6, 0)\}$ aqui não tem o par $(3, 3)$, pois os dígitos são distintos. Para $O + T = 15$ temos os quatro pares $(O, T) \in \{(9, 6), (8, 7), (7, 8), (6, 9)\}$. Totalizando assim 9 soluções.

Alteração de gabarito. observe que como $M = 4$, devemos desconsiderar as soluções $(O, T) = (2, 4)$ e $(O, T) = (4, 2)$, pois as triplas $(4, 2, 4)$ e $(2, 4, 4)$ tem algarismo repetidos. Logos temos 7 soluções e não 9. Assim o gabarito passar a ser letra (d). ☐

Questão 7. *(Questão 20 na prova) Seja r o resto da divisão de $2025^{2023^{2024}}$ por 1013. Determine o valor da soma dos dígitos de r.*

(a) 251 **(b)** 511 **(c)** 1011 **(d)** 512 **(e)** 1012

Resposta: 4.

Solução. Perceba que 2025 divido por 1013 tem quociente igual a 1 e resto igual a 1012. Utilizando congruência modular, note que

$$2025 \equiv -1 \mod 1013$$

Como 2023^{2024} é ímpar, então

$$2025^{2023^{2024}} \equiv (-1)^{2023^{2024}} \mod 1013 \quad \Rightarrow \quad 2025^{2023^{2024}} \equiv -1 \mod 1013.$$

Portanto, $2025^{2023^{2024}}$ deixa resto 1012 na divisão 1013. Assim, a soma dos dígitos de r é igual a 4.

Correção: Essa questão era para ter a alternativa (e)1012. E seria a questão aberta pedindo a soma dos dígitos no nível Febe. Houve um equivoco na questão e ela ficou sem alternativa correta no nível Atlas. Logo ela foi **anulada,** apenas no nível Atlas. ☐

---

4 Prova Nível Febe

- Questão 5 é a dos triângulos a qual vamos alterar o gabarito para 18.

- Questão 7 é a da corrida que ja analisamos e será anulada.

- Questão 10 é a das triplas O,T,M que terá o gabarito alterado para 7;

- Questão 12 só esta errada no arquivo do pdf, na plataforma quilgo existe a alternativa 2033;

- Questão 16 infelizmente, faltou a palavra anterior. Isto é,"Um número é chamado hidrático quando o seu último dígito é igual ao produto dos seus dígitos **anteriores**. Apesar de estar claro para a maioria dos alunos pode causar ambiguidades para alguns. Assim a questão foi anulada.

- Questão 20 ela era uma questão aberta na plataforma quilgo, então não precisa ser anulada. Só vamos ajeitar o arquivo pdf.